EI 09: Übungsserie Berechenbarkeit

Aufgabe 1

Auf den Folien 19/20 der Vorlesung haben wir eine Turingmaschine eingeführt, welche den binären Nachfolger eine natürlichen Zahl berechnet. Diese Maschine hat den Nachteil, dass am Ende der Berechnung der Lese-Schreib-Kopf im Allgemeinen nicht auf dem ersten Zeichen des Resultats steht.

Modifizieren Sie die Turingmaschine aus der Vorlesung so, dass am Ende der Rechnung der Lese-Schreibkopf auf dem ersten Bit des Ergebnisses steht.

Hinweis: Führen Sie einen weiteren Zustand ein und modifizieren Sie die Übergangsfunktion.

Aufgabe 2

Im folgenden bezeichen $\mathbb{N}$ die Menge der natürlichen Zahlen, d.h. $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$. Wir nennen eine unendliche Menge A *abzählbar unendlich*, falls sich die Elemente von A durchnummerieren lassen, d.h. dass A in der Form $A = \{a_0, a_1, a_2, \ldots\} = \{a_i : i \in \mathbb{N}\}$ geschrieben werden kann.

Ferner bezeichen $\mathcal{F}$ die Menge aller Abbildungen (Funktionen) von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{N}$, formaler: $\mathcal{F} = \{f; f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}\}$. Schliesslich sei $\mathcal{C}$ die Menge der (totalen) berechenbaren Funktionen von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{N}$, d.h. $\mathcal{C} = \{f; f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \text{ und } f \text{ berechenbar}\}$.

1. Erläutern Sie, wieso $\mathcal{C}$ abzählbar unendlich ist.

2. Zeigen Sie, dass $\mathcal{F}$ nicht abzählbar unendlich ist.
   Hinweis: Nehmen Sie an, $\mathcal{F}$ wäre abzählbar, d.h. $\mathcal{F} = \{f_0, f_1, f_2, \ldots\}$. Definieren Sie dann eine Funktion g von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{N}$ duch $g(n) := f_n(n) + 1$. Die Funktion g ist ein Element von $\mathcal{F}$, d.h. ... etc.

3. Folgern Sie aus 1. und 2., dass es Funktionen von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{N}$ gibt, welche nicht berechenbar sind.

Aufgabe 3

Führen Sie den auf Folie 27 und in der Vorlesung skizzierten Beweis der Unentscheidbarkeit des Halteproblems noch einmal in allen Einzelheiten aus.